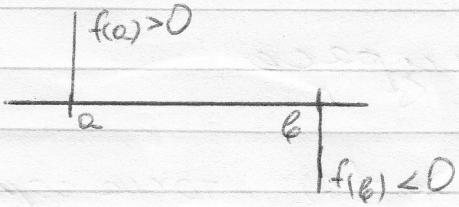
Дис Кирчев 23.10.12



$A = \{x;\ f(x) > 0\}$ $\quad x_1 \le c$

c - точно горна граница

$\varepsilon > 0 \qquad c - \varepsilon \le x_1 \le c$

Допускаме $f(c) > 0$

$x_2 \in (c-\varepsilon;\ c+\varepsilon) \qquad f(x) > 0$

$c < x_2 < c+\varepsilon \Rightarrow f(x_2) > 0 \Rightarrow$

$x_2 \in A \Rightarrow f(c) \ge 0$ не е вярно

Допускаме $f(c) < 0$

$\exists\ x_3 \in (c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$ т.ка $f(x_3) < 0$ но

$c - \varepsilon < x_3 < c \Rightarrow f(x_3) > 0 \Rightarrow$

$f(x_3) \in A$ но A е дефинирана с $f(x) > 0$ т.е. тъй като x_3 е положително и отрицателно едновременно $\Rightarrow = 0$

T_2 Вайерщрас

$[a,b]$ $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ – точна горна граница

$m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ – точна долна граница

$m \le f(x) \le M \quad x\in[a,b]$

$\exists\, x_m$ и x_M т.че $f(x_m) = m$ и $f(x_M) = M$

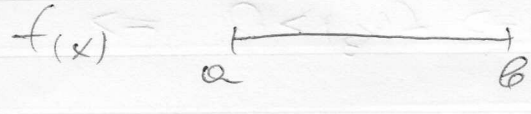
Допускаме противното т.е. че M не съществува

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} < C \Rightarrow$$

$$M - f(x) > 1/C \text{ и } f(x) < M - 1/C$$

това се явява новата точна горна граница но тъй като само M е Т.Г.Г $\Rightarrow$ в противоречие

T_1 за междинни стойности



$M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$m \le f(x) \le M$

Каквото и C да се вземе (между тях) $\exists\, x_0$ такова че $m \le C \le M$ и $f(x_0) = C$

Доказателство

$g(x) = f(x) - C$ $\exists x_M$ и x_m т.че

$f(x_M) = M$ и $f(x_m) = m$

разглеждаме сегмента

$[x_m, x_M]$ и $x_m < x_M$ тогава

$g(x_m) = f(x_m) - C = m - C < 0$

$g(x_M) = f(x_M) - C = M - C > 0$

$\exists$ з т.че $g(z) = 0 = f(z) - C \Rightarrow$

$$f(z) = C$$

Коши

$f(x)$ $x_0 \in D$

$\varepsilon > 0$ $\delta > |x - x_0|$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\delta_n = 1/n$; $|x_n' - x_n''| < 1/n$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$$

Кантор

$\{x_n'\}$ $\{x_n''\}$ $a \leq x_n' \leq b$

$x_{n_k}' \longrightarrow x_0$; x_{n_k}'' $1/n_k$

$|x_{n_k}'' - x_0| = |x_{n_k}'' - x_{n_k}' + x_{n_k}' - x_0| \leq |x_{n_k}'' - x_{n_k}'| + |x_{n_k}' - x_0$

$$\leq 1/n_k + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ x'_{nk} и x''_{nk} имат общата (една и съща) граница с x_0 т.е. $\Rightarrow$ $x''_{nk} \to x_0$

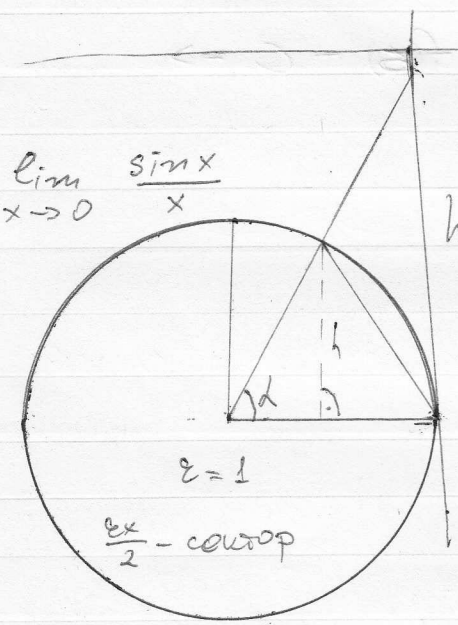
$$\lim_{k\to\infty} x'_{nk} = \lim_{k\to\infty} x''_{nk} = x_0$$

$x'_{n_1}, x''_{n_1}, x'_{n_2}, x''_{n_2}$ --- $\to x_0$

$f(x'_{n_1}), f(x'_{n_2})$ --- $\to f(x_0)$ т. е непрекъсната

оттук и противоречие от условието с $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$



$|\sin x| \leq |x|$

$\pi/2 > x > 0$

$S_\Delta = \frac{1h}{2} < x/2 < \frac{1h_1}{2}$

$h < x < h_1$

$\sin x = h/1$, $tgx = h_1/1$

$\sin x < x < tgx$ - делим на x $\Rightarrow$

$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{tgx}{x}$

$1/\cos x > x/\sin x > 1$

$\frac{tgx}{x} = \frac{\sin x}{x\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\frac{x}{\sin x} < 1/\cos x \Rightarrow 1/\cos x > x/\sin x > 1$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\cos 0 = 1 \quad x \quad 1 \quad \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ само дясна граница

при $x < 0$

$y = -x > 0$

$x = -y$

$$\cos y = \cos(-y) < \frac{\sin(-y)}{(-y)} < 1 \quad \Rightarrow$$

$$\cos y < \frac{\sin y}{y} < 1$$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\cos 0 = 1 \quad 1 \quad \Rightarrow$

Лявата граница е 1 $\Rightarrow$

Щом лявата и дясната граница са 1, значи горната и долната граница са 1